Addendum

Ici, on souhaite démontrer que:

$$\boxed{\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(\mathrm{s})\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = e^{At}}$$

Note : Ceci est en général vrai seulement dans le cas des systèmes linéaires invariants.

Soit un système pour lequel le signal d'entrée est nul, le model d'état est donc réduit à :

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

La démonstration passe par la construction d'une séquence de vecteurs $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ de dimension n x 1 définis sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ tel que :

$$\begin{aligned}
&x_0(t) = x_0 \\
&x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_0(\sigma_1)\,d\sigma_1 \\
&x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_1(\sigma_1)\,d\sigma_1 \\
&x_3(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_2(\sigma_1)\,d\sigma_1 \\
&\vdots \\
&x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_{k-1}(\sigma_1)\,d\sigma_1
\end{aligned}$$

Rugh[1] démontre que $x_k(t)$ converge vers la solution de (1) lorsque $k \to +\infty$. Alors la solution ($x_\infty(t)$) peut s'écrire sous forme de série :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_0\,d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} A\int_{t_0}^{\sigma_1} Ax_0\,d\sigma_2\,d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} A\int_{t_0}^{\sigma_1} A\int_{t_0}^{\sigma_2} Ax_0\,d\sigma_3\,d\sigma_2\,d\sigma_1 + \dots \tag{2}$$

Puisque (2) peut se réécrire tel que :

$$x(t) = \left[I + \int_{t_0}^{t} A\,d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} A\int_{t_0}^{\sigma_1} A\,d\sigma_2\,d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} A\int_{t_0}^{\sigma_1} A\int_{t_0}^{\sigma_2} A\,d\sigma_3\,d\sigma_2\,d\sigma_1 + \dots \right] x_0$$

[1] Wilson J. Rugh: *Linear System Theory,* Prentice Hall – Information and system sciences series 1993, 356 p.

Ceci implique que la matrice de transition est définie par la série (connue sous le nom de « série de *Peano-Baker* » :

$$\Phi(t,\tau) = I + \int_{t_0}^{t} A d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} A \int_{t_0}^{\sigma_1} A d\sigma_2 d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} A \int_{t_0}^{\sigma_1} A \int_{t_0}^{\sigma_2} A d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots$$

Or, si la matrice d'état A est invariante, elle peut « sortir » de l'intégrale et on peut alors résoudre beaucoup plus facilement la série de Peano-Baker :

$$\begin{aligned}
\Phi(t,\tau) &= I + A\int_{t_0}^{t} d\sigma_1 + A^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\sigma_1} d\sigma_2 d\sigma_1 + A^3 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\sigma_1}\int_{t_0}^{\sigma_2} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots \\
&= I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{6} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-\tau)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Dans ce dernier résultat, on reconnait la série de Taylor de la fonction exponentielle[2], de sorte que la matrice de transition peut se réécrire :

$$\Phi(t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-\tau)^k}{k!} = e^{A(t-\tau)}$$

En considérant la série débutant au temps initial t_0, on peut réécrire:

$$\Phi(t,t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-t_0)^k}{k!} = e^{A(t-t_0)}$$

En considérant le temps initial nul : $t_0 = 0$:

$$\boxed{\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t)^k}{k!} = e^{A(t)}}$$

Finalement, dans le domaine échantillonné (en prenant t= T la période d'échantillonnage) :

$$\boxed{\Phi(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (T)^k}{k!} = e^{A(T)}}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

---

[2] Vous pouvez vous rafraîchir la mémoire en visitant http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series