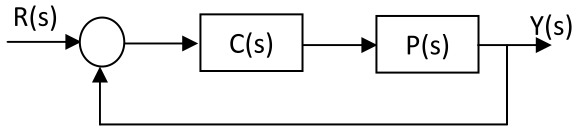
# Conception de contrôleurs à avance / retard de phase

**Vous travaillez pour une industrie qui fait la commercialisation de maïs soufflé en tant qu'ingénieur-concepteur. Le procédé de transformation des grains de maïs en maïs soufflé (pop-corn) comporte plusieurs étapes, et vous travaillez activement à l'élaboration du système de chauffage rapide de grains de maïs représenté par le schéma fonctionnel suivant :**




**Où :**
$$\begin{cases} C(s) = \text{Contrôleur (à définir)} \\ P(s) = \dfrac{1}{(s+17)(s+2)s} \quad \text{(Fonction de transfert en boucle ouverte)} \\ R(s) = \text{Consigne à suivre (Température)} \\ \mathrm{Y}(s) = \text{Température réelle du papier} \end{cases}$$

Votre patron vous demande de concevoir un contrôleur de sorte à ce que la température ne dépasse pas la consigne + 20% (sans quoi le maïs pourrait s'enflammer) et de respecter un temps de réponse (à 2%) environ égal à 2 secondes (2 secondes correspond au temps optimal pour « adapter » les grains à une nouvelle température).

***Question:*** ***<u>Réalisez ce contrôleur et expliquez votre démarche…</u>***

***Réponse :***

Puisque votre patron vous donne des contraintes de conception qui concernent la réponse en <u>régime transitoire</u>, vous pensez automatiquement à synthétiser un <u>contrôleur à avance de phase</u> : $C(s) = K_A \dfrac{s + 1/\tau_A}{s + 1/\alpha\tau_A}$

## *Étape #1: Déterminer les pôles désirés*

S1 : Pour simplifier les calculs, on peut prendre ζ=0.5 (ce qui implique dépassement environ égale à 16.3%, donc plus petit que 20%).

S2 : $\dfrac{4}{\zeta\omega_n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \zeta\omega_n = 2 \quad \Rightarrow \omega_n = 4$

Donc, les pôles désirés sont : $s_d = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = -2 \pm 3.4641j$

## *Étape #2: Déterminer le zéro du contrôleur*

Si cela est possible, vous voulez annuler un pôle en boucle ouverte avec le zéro du contrôleur. Cependant, pour ce faire, le pôle en boucle ouverte en question ne doit pas être trop prêt de l'origine (par rapport à la valeur réelle des pôles désirés) parce que l'effet du zéro pourrait être trop important (advenant une annulation pôle-zéro imparfaite). À l'inverse, si vous avez le choix, vous ne voulez pas non plus annuler inutilement un pôle qui n'a pas beaucoup d'influence sur la dynamique du système (un pôle situé très à gauche dans le plan complexe). Donc, en tenant compte de ces considérations, vous décidez de choisir le zéro du contrôleur de sorte à ce que ce dernier annule le pôle s= -2 de la fonction de transfert en B.O. du système :

$$C(s) = K_A \frac{s+2}{s + {}^{1}\!/_{\alpha\tau_A}} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_A = {}^{1}\!/_{2}$$

## *Étape #3: Déterminer le pôle du contrôleur*

À cette étape vous voulez déterminer le pôle du contrôleur de sorte que le lieu des racines (graphique des pôles du système en fonction du gain $K_A$ ) passe par les pôles désirés. À cette étape, un petit rappel pourrait peut-être vous faire un peu de bien :

La fonction de transfert du système général en boucle fermée est :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$$

Les pôles du système en boucle fermée sont donc obtenus en posant le *polynôme caractéristique* égal à 0 :

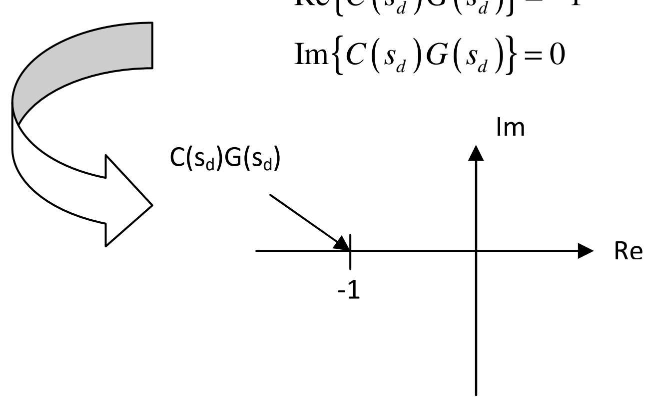
$$1+C(s)G(s) = 1 + K_A \frac{s + {}^{1}\!/_{\tau_A}}{s + {}^{1}\!/_{\alpha\tau_A}} \cdot G(s) = 0$$

Une valeur de s désirée (« $s_d$ ») appartiendra donc au lieu des racines (qui est fonction du gain $K_A$) si elle vérifie l'équation précédente. D'ailleurs, l'équation précédente peut être réécrite :

$$C(s_d)G(s_d) = -1$$

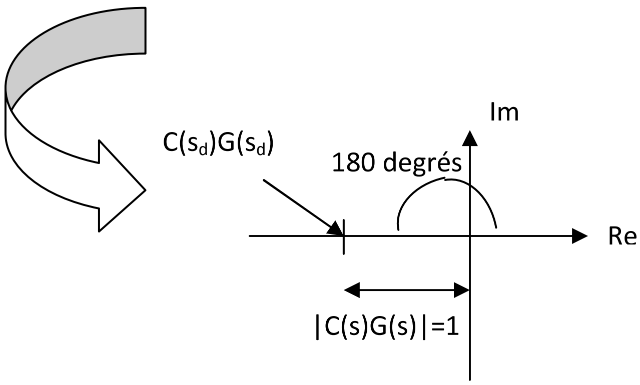
Et puisque « s » est une variable complexe, cette dernière équation implique en fait <u>deux</u> équations cartésiennes, i.e. :

$$\mathrm{Re}\{C(s_d)G(s_d)\} = -1$$
$$\mathrm{Im}\{C(s_d)G(s_d)\} = 0$$



Or, ces équations cartésiennes peuvent aussi se réécrire sous forme polaire :

$$\left|C(s_d)G(s_d)\right| = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Relation d'amplitude}$$
$$\angle C(s_d)G(s_d) = 180° \quad \rightarrow \quad \text{Relation d'angle}$$




Encore une fois, vous devez toujours garder en tête qu'un pôle désiré appartiendra au lieu des racines si et seulement si les deux relations ci-dessus sont respectées. Développons un peu la relation d'angle :

$$180° = \angle C(s_d)G(s_d) = \angle\left(K_A \frac{s_d + \frac{1}{\tau_A}}{s_d + \frac{1}{\alpha\tau_A}} \frac{\prod_{i=1}^{m}(s_d - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s_d - p_i)}\right)$$
$$= \underbrace{\angle\left(s_d + \frac{1}{\tau_A}\right) - \angle\left(s_d + \frac{1}{\alpha\tau_A}\right)}_{\angle C(s)} + \underbrace{\angle\left(\prod_{i=1}^{m}(s_d - z_i)\right) - \angle\left(\prod_{i=1}^{n}(s_d - p_i)\right)}_{\angle G(s)}$$

C'est le seul terme qui n'est pas encore déterminé

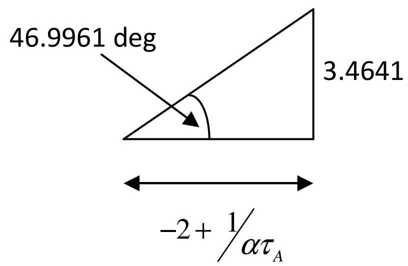
Donc, à partir de la relation d'angle, vous pouvez déterminer le pôle de votre contrôleur de sorte à ce que la relation d'angle soit respectée pour le point $s=s_d$, pour donc faire en sorte que le lieu des racines interpole le point $s=s_d$. Ainsi, dans notre exemple, en tenant compte de l'annulation pôle-zéro :

$$180° = \underbrace{\angle\left(s_d + \frac{1}{\tau_A}\right) - \angle\left(s_d + \frac{1}{\alpha\tau_A}\right)}_{\angle C(s)} + \underbrace{\angle\left(\prod_{i=1}^{m}(s_d - z_i)\right) - \angle\left(\prod_{i=1}^{n}(s_d - p_i)\right)}_{\angle G(s)}$$
$$= 0° - \angle\left(s_d + \frac{1}{\alpha\tau_A}\right) + 0° - \angle(s_d) - \angle(s_d + 17) = 0° - \angle\left(-2 + 3.4641j + \frac{1}{\alpha\tau_A}\right) + 0° - \underbrace{\angle(-2 + 3.4641j)}_{=90°+\operatorname{atan}\left(\frac{2}{3.4641}\right)\approx 120°} - \underbrace{\angle(15 + 3.4641j)}_{=\operatorname{atan}\left(\frac{3.4641}{15}\right)\approx 13.0039°}$$
$$= -\angle\left(-2 + 3.4641j + \frac{1}{\alpha\tau_A}\right) - 133.0039°$$

Donc, finalement on a :

$$\angle\left(-2+3.4641j+\frac{1}{\alpha\tau_A}\right)=-133.0039°-180°=-313.0039°=46.9961°$$

On trouve alors directement la valeur du pôle du contrôleur :




$$\boxed{\begin{aligned}&-2+\frac{1}{\alpha\tau_A}=\frac{3.4641}{\tan(46.9961°)}\approx 3.2308\\&\Rightarrow \frac{1}{\alpha\tau_A}=3.2308+2=5.2308\end{aligned}}$$

**<u>Trouvons maintenant le gain $K_A$ qui permet de situer les pôles exactement aux positions désirées :</u>**

De la relation d'amplitude au point $s=s_d$ :

$$\left|C(s_d)G(s_d)\right|=1 \qquad \Rightarrow \qquad \left|K_A\left(\frac{s_d+2}{s_d+5.2308}\right)\left(\frac{1}{(s_d+2)(s_d+17)s_d}\right)\right|=\left|K_A\left(\frac{1}{s_d+5.2308}\right)\left(\frac{1}{(s_d+17)s_d}\right)\right|=1$$

$$\Rightarrow K_A=\left|(s_d+5.2308)((s_d+17)s_d)\right|=\left|(-2+3.4641j+5.2308)((-2+3.4641j+17)(-2+3.4641j))\right|$$

$$=\left(\sqrt{3.2308^2+3.4641^2}\right)\left(\sqrt{15^2+3.4641^2}\right)\left(\sqrt{(-2)^2+3.4641^2}\right)\approx 291.6934$$

**Le contrôleur a donc la forme suivante :**

$$C(s)=291.6934\cdot\frac{s+2}{s+5.2308} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\approx 0.3824$$

## *Étape #4: Vérifions les résultats*

Pour prouver l'efficacité de votre contrôleur, votre patron souhaite obtenir des résultats de simulation démontrant que votre contrôleur atteint les objectifs de design :

La fonction de transfert du système en boucle fermée avec ce contrôleur est :

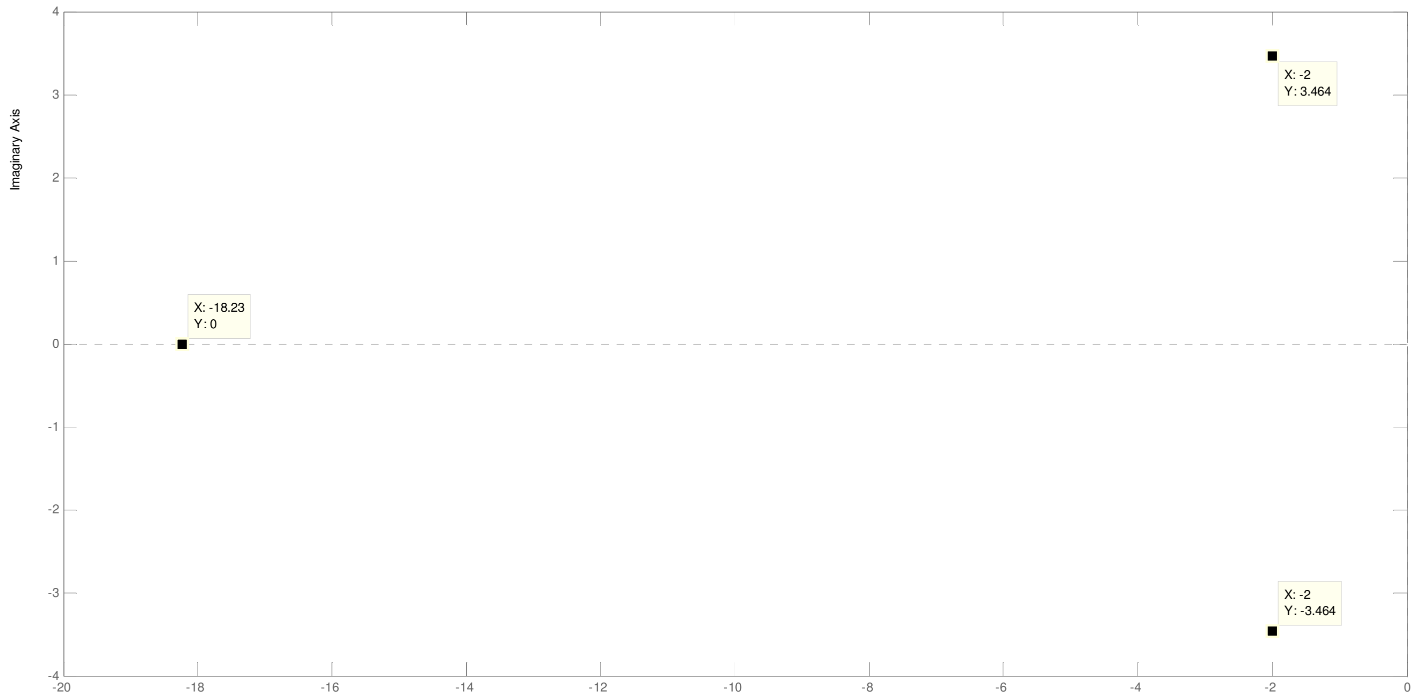
$$T(s)=\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}=\frac{291.6934}{(s+18.2308)(s^2+4s+16)}$$

En utilisant MATLAB :

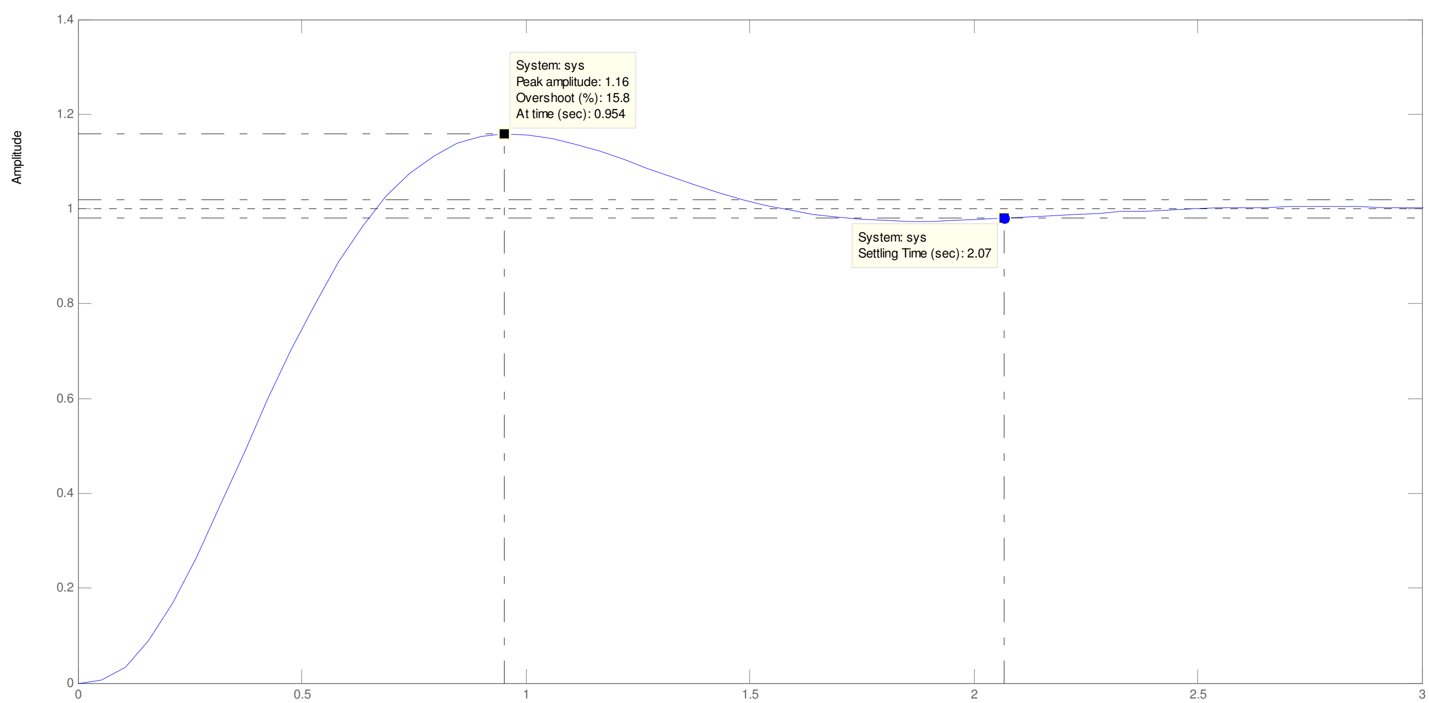
```
>> sys=zpk([],[-18.2308],[291.6934])*tf([1],[1 4 16])

Zero/pole/gain:
        291.6934
-------------------------
(s+18.23) (s^2 + 4s + 16)
```

Pôles du système en boucle fermée :




Réponse temporelle :



***Question :***Vous voyez que les spécifications sont atteintes tel que demandé par votre patron. Par contre, le temps de réponse de 2.07 secondes pourrait être problématique. Que faire si vous vouliez raffiner votre design afin que le temps de réponse soit inférieur à 2 secondes?

***Réponse :*** Vous pourriez simplement recommencer la même procédure en considérant cette fois une valeur de $\omega_n$ plus grande que 4 pour contrer l'effet minime du pôle non annulé du système en boucle ouverte (s=-17).

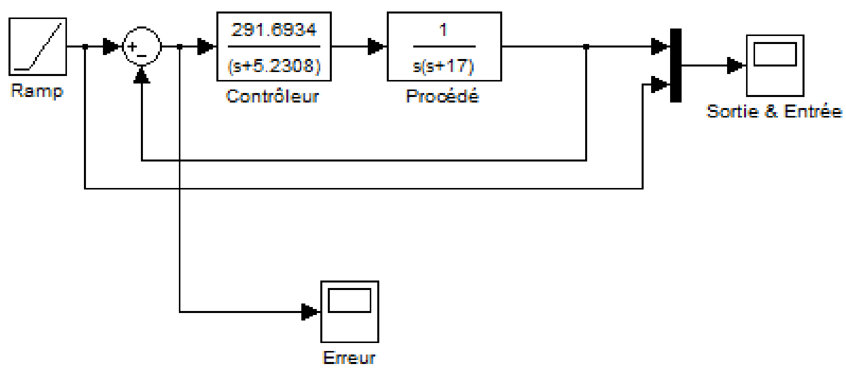
***Question :*** Quelle est l'erreur en régime permanent pour le suivi d'une rampe unitaire?

***Réponse :***

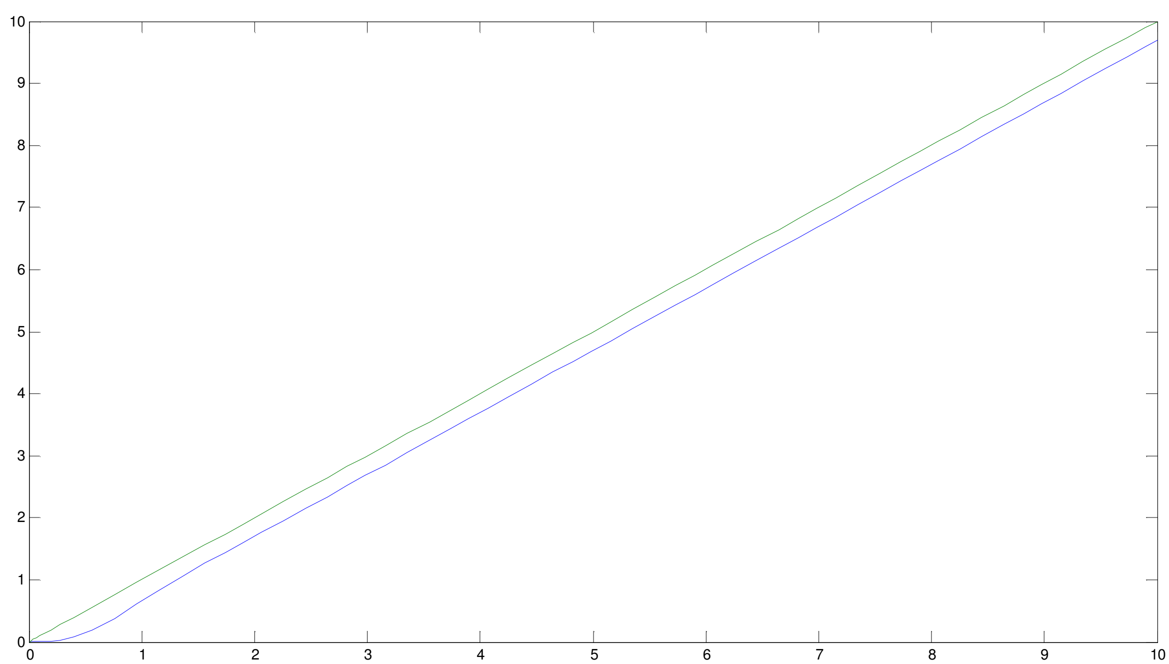
$$K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot C(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_A\alpha G(s) = 291.6934\cdot 0.3824\cdot\frac{1}{(2)(17)} = 3.2807$$

$$\text{E.R.P.}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{3.2807}\approx 0.3048$$

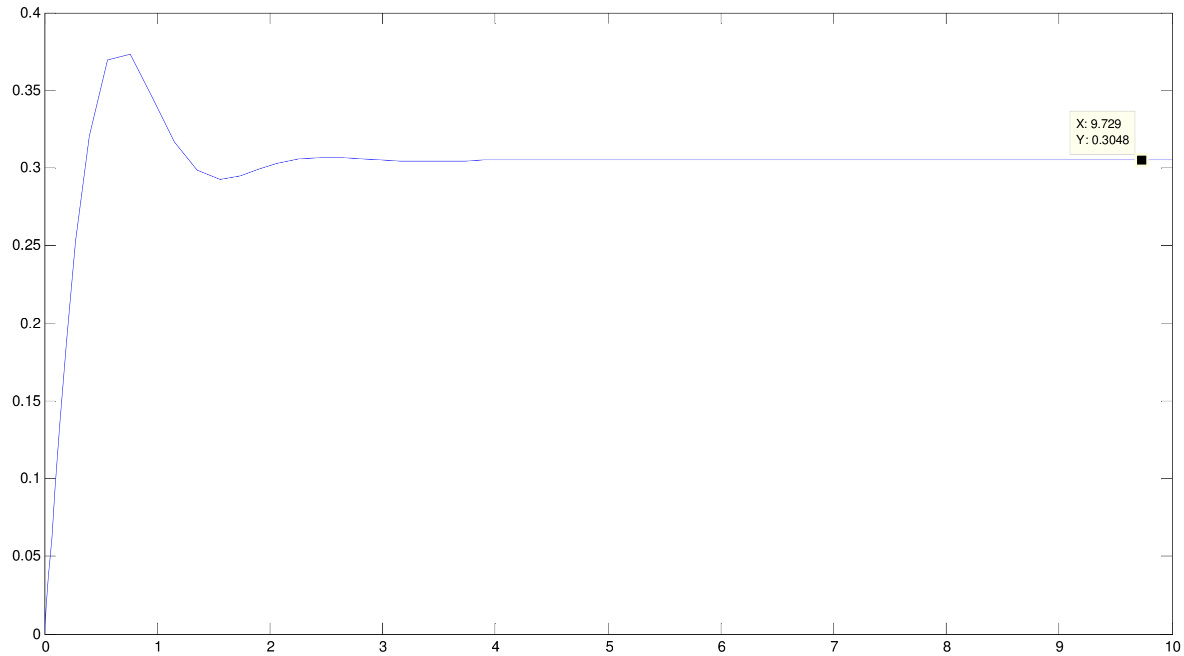
En effet, à l'aide de Simulink :




Signal de sortie VS signal de référence :



Plus précisément, la valeur de l'erreur confirme bel et bien nos calculs :




Votre patron est très satisfait de vos résultats. Il vous trouve tellement bon, qu'il ne se gêne surtout pas pour rajouter une autre contrainte à votre design : il souhaite aussi que l'erreur en régime permanent pour le suivi d'une consigne de type rampe **soit inférieure à 0.2**. Votre patron ne remarque pas le tremblement de votre lèvre supérieure ni la sueur froide qui perle sur votre front, il vous laisse plutôt travailler en paix en vous priant de terminer votre conception au plus tôt.

***Solution :***

Une erreur en régime permanent inférieure à 0.2 implique une valeur de constante d'erreur de vitesse tel que :

$$E.R.P. = \frac{1}{K_V} < 0.2 \qquad \Rightarrow \quad K_V > 5$$

Puisque cette spécification concerne les performances en régime permanent, vous pensez tout de suite à implanter un contrôleur à retard de phase en cascade avec le contrôleur à avance de phase déjà conçu. Vous suivez la procédure présentée dans le cadre du cours :

## *Étape #1:*

On pose $K_R = 1$ dans l'équation du contrôleur à retard de phase : $C_R(s) = K_R \frac{s + 1/\tau_R}{s + 1/\beta\tau_R} = \frac{s + 1/\tau_R}{s + 1/\beta\tau_R}$

## *Étape #2: Détermination de la valeur de $\beta$*

On choisit une valeur de $\beta$ égale ou supérieure au facteur par lequel il faut augmenter la constante d'erreur. Ici, à priori, a constante d'erreur de vitesse est égale à 3.2807 et vous souhaitez qu'elle soit plus grande que 5. Vous décidez donc de choisir une valeur de $\beta = 2$ afin de surpasser les attentes de votre patron.

## *Étape #3: Détermination de la valeur de $\tau_R$*

Vous devez poser la valeur de $\tau_R$ telle que la phase du contrôleur évalué en $s=s_d$ soit plus petite que 5 degrés (en valeur absolue), plus précisément :

$$\left|\angle C_R(s_d)\right| = \left|\angle\left(s_d + \tfrac{1}{\tau_R}\right) - \angle\left(s_d + \tfrac{1}{\beta\tau_R}\right)\right| < 5°$$

Vous voulez satisfaire cette contrainte afin d'éviter que la phase du contrôleur à retard de phase soit trop négative, et qu'elle influence donc votre système en déplaçant trop le lieu des racines vers la droite! Dans le cas qui nous concerne, vous pourrez vérifier que :

$$\begin{aligned}&\left|\angle C_R(s_d)\right| = \left|\angle\left(s_d + \tfrac{1}{\tau_R}\right) - \angle\left(s_d + \tfrac{1}{\beta\tau_R}\right)\right| \\ &= \left|\angle\left(-2+3.4641j+\tfrac{1}{5}\right) - \angle\left(-2+3.4641j+\tfrac{1}{2\cdot 5}\right)\right| < 5° \qquad \Rightarrow \qquad \tau_R = 5\end{aligned}$$

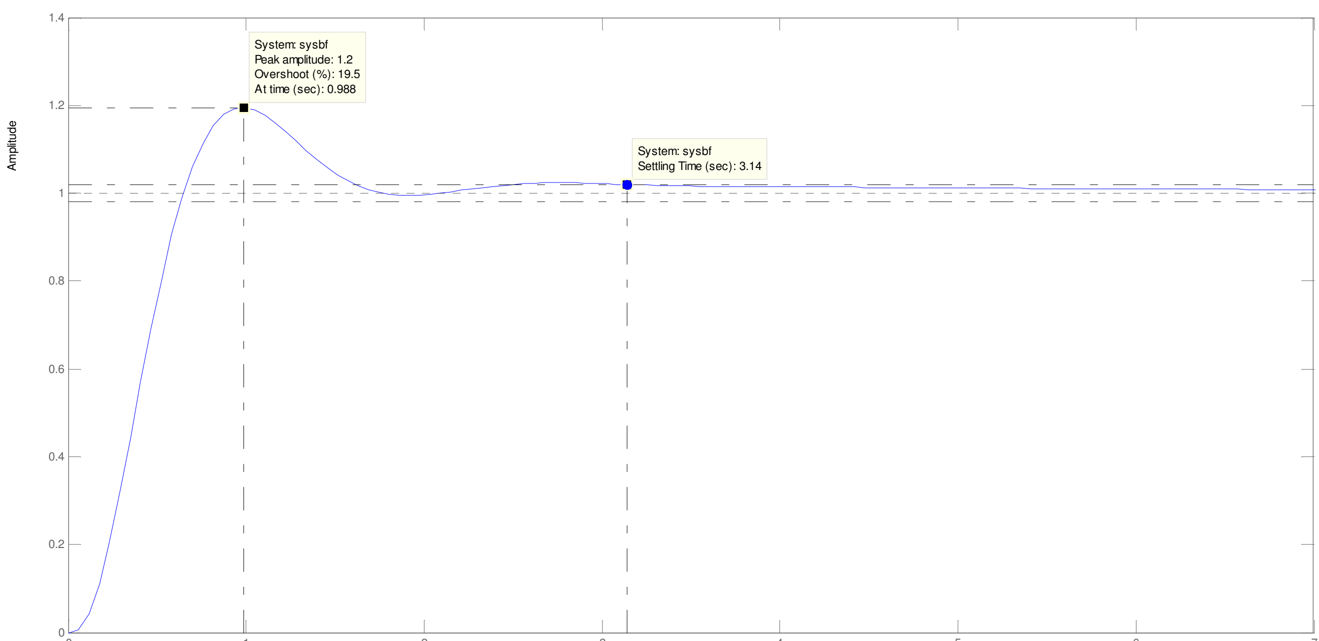
Votre contrôleur à donc la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = \frac{s+0.2}{s+0.1}$$

## *Étape #4: Vérification du système avec ce contrôleur*

La fonction de transfert du système en boucle fermée avec ce contrôleur est :

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{291.6934(s+0.2)}{(s+18.22)(s+0.2063)(s^2+3.9s+15.51)}$$

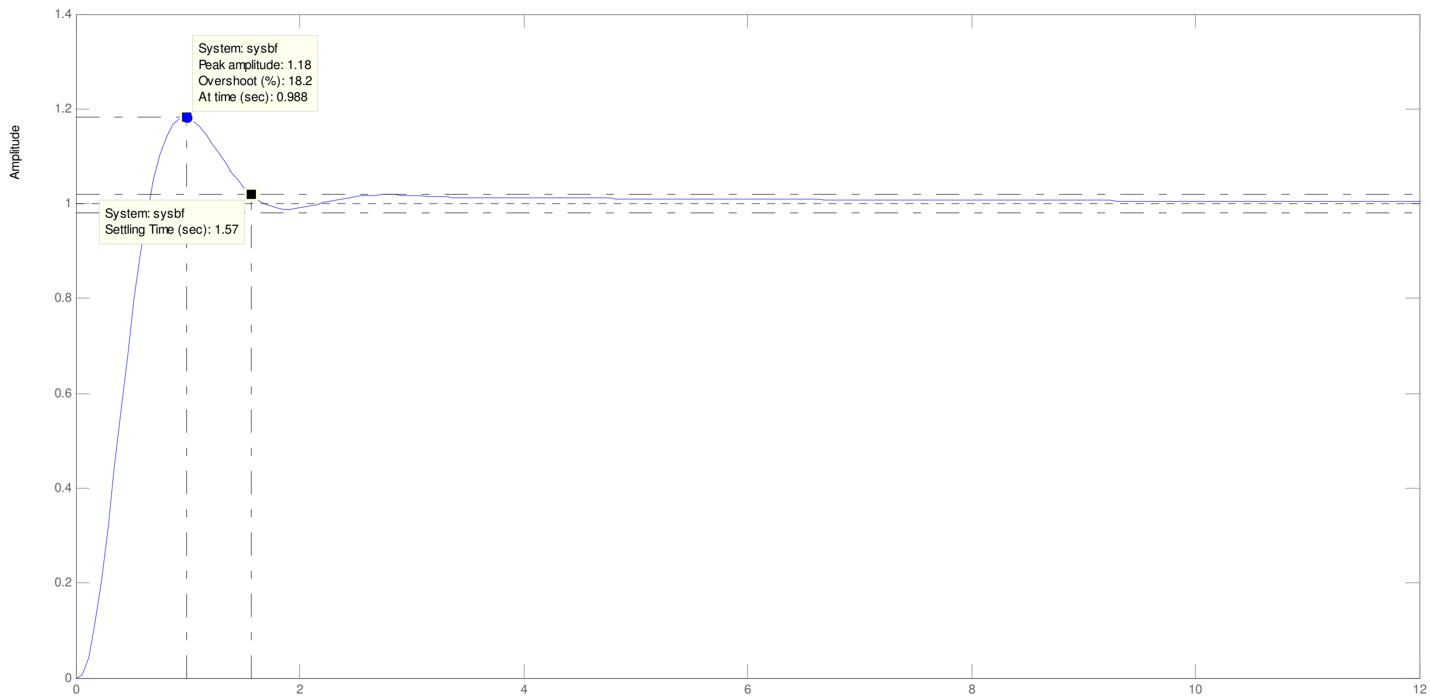


Vous n'aimez pas la façon dont votre contrôleur à retard de phase a modifié la réponse de votre système global… Vous remédiez à ce problème en augmentant $\tau_R$:

$$\text{En posant } \tau_R = 8 \qquad \Rightarrow \qquad C_R(s) = \frac{s+0.1250}{s+0.0625}$$

La fonction de transfert en boucle fermée devient alors :

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{291.6934(s+0.125)}{(s+18.23)(s+0.1274)(s^2+3.939s+15.7)}$$



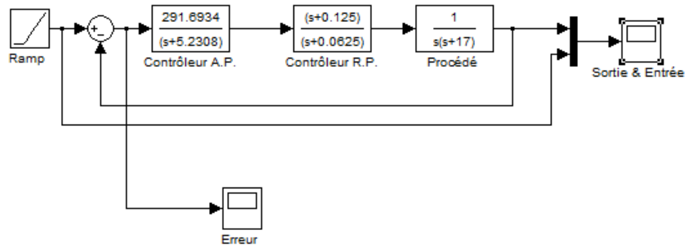

Excellent, les caractéristiques de la réponse transitoire respectent les spécifications émises par votre patron. Vérifions maintenant l'erreur en régime permanent pour une entrée de type rampe :

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot C(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_A \alpha K_R \beta G(s) = 291.6934 \cdot 0.3824 \cdot 1 \cdot 2 \frac{1}{(2)(17)} = 6.5614$$

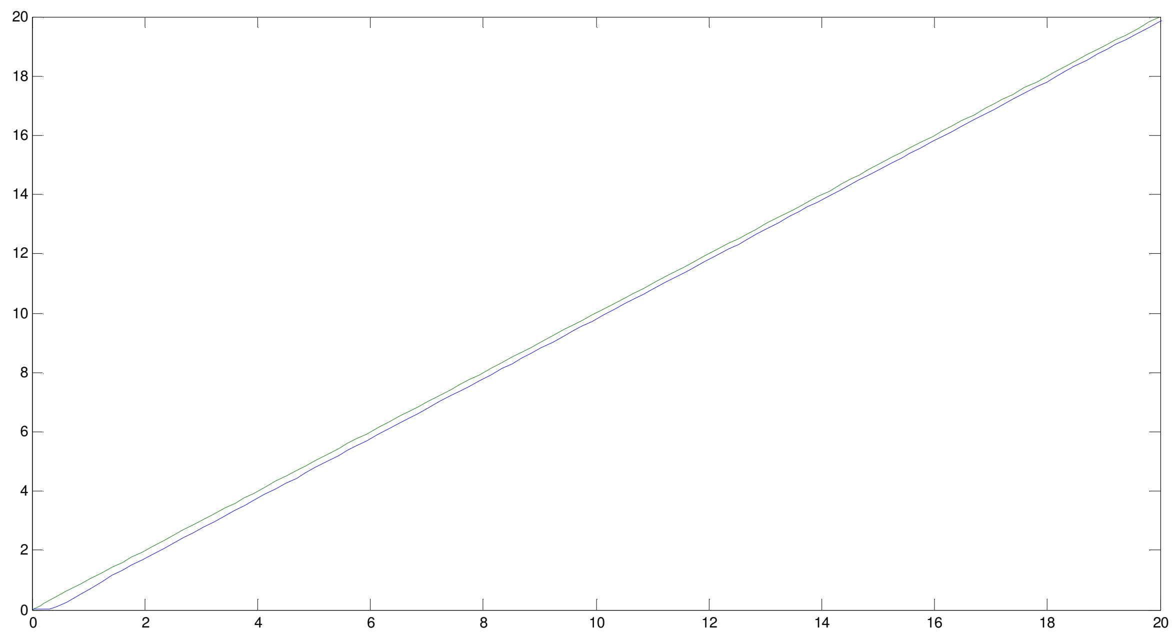
$$\text{E.R.P.} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{6.5614} \approx 0.1524$$

Ça semble bon, confirmons ces résultats par simulation (page suivante).

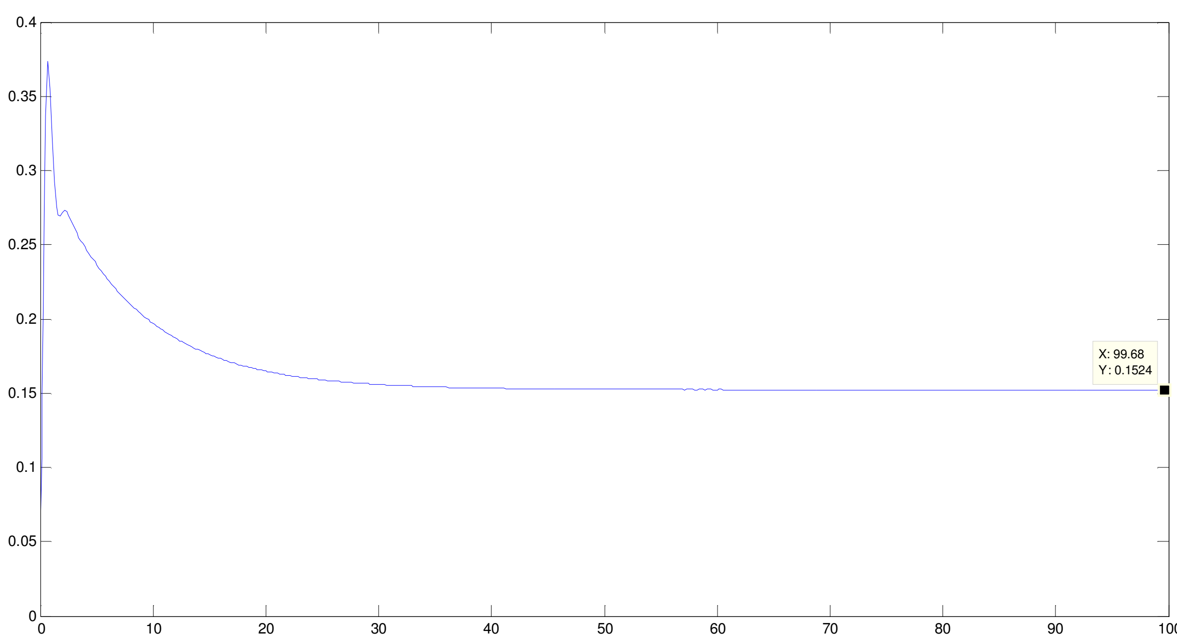
Le circuit Simulink :




Signal de sortie VS signal de référence :



L'erreur en fonction du temps :



# Conception de contrôleurs à avance / retard de phase

# Réponses aux problèmes des examens passés

$$G(s) = \frac{30}{s(s+3)(s+10)}$$

**g.** Faire la synthèse du contrôleur à avance de phase $C(s)$ pour que le système en boucle fermée ait les pôles dominants $-2.5 \pm 2.5j$. On suggère de canceller le pôle à $-3$ avec le zéro du contrôleur ; pourquoi ne pas canceller le pôle intégrateur ou le pôle à $-10$ ?

**Étape#1 & 2 :**

$$C_A(s) = K_A \frac{\left(s + 1/\tau_A\right)}{\left(s + 1/\alpha\tau_A\right)} = K_A \frac{(s+3)}{\left(s + 1/\alpha\tau_A\right)} \quad \Rightarrow \quad \tau_A = 1/3$$

**Étape#3 :**

$$180° = -\angle\left(s_d + 1/\alpha\tau_A\right) - \angle(s_d) - \angle(s_d + 10)$$

$$= -\angle\left(-2.5 + 2.5j + 1/\alpha\tau_A\right) - \underbrace{\angle(-2.5 + 2.5j)}_{135°} - \underbrace{\angle(-2.5 + 2.5j + 10)}_{\text{atan}\left(2.5/7.5\right) = 18.4349°}$$

$$\angle\left(-2.5 + 2.5j + 1/\alpha\tau_A\right) = -180° - 135° - 18.4349° = -333.4349° = 26.5651°$$

Donc;

$$\Rightarrow -2.5 + 1/\alpha\tau_A = \frac{2.5}{\tan(26.5651°)} \quad \Rightarrow \quad 1/\alpha\tau_A = 7.5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3/7.5$$

**Trouvons maintenant le gain $K_A$ :**

$$|C(s_d)G(s_d)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left| K_A \left(\frac{s_d + 3}{s_d + 7.5}\right)\left(\frac{30}{(s_d+3)(s_d+10)s_d}\right)\right| = \left| K_A \left(\frac{1}{s_d + 7.5}\right)\left(\frac{30}{(s_d+10)s_d}\right)\right| = 1$$

$$\Rightarrow K_A = \frac{|(s_d + 7.5)((s_d+10)s_d)|}{30} = \frac{|(-2.5 + 2.5j + 7.5)((-2.5 + 2.5j + 10)(-2.5 + 2.5j))|}{30}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5^2 + 2.5^2}\right)\left(\sqrt{7.5^2 + 2.5^2}\right)\left(\sqrt{(-2.5)^2 + 2.5^2}\right)}{30} \approx 5.2083$$

**Le contrôleur est donc :**

$$C(s) = 5.2083\frac{s+3}{s+7.5}$$

Vérifications - en boucle fermée :

$$T(s) = \frac{156.249}{(s+12.5)(s^2+5s+12.5)}$$

Effectivement les pôles sont situés aux bons endroits :

```
>> roots(sym2poly(expand((s+12.5)*(s^2+5*s+12.5))))

ans =

 -12.5000
  -2.5000 + 2.5000i
  -2.5000 - 2.5000i
```

**4.** On conserve le contrôleur à avance de phase précédent.

**h.** Quelle est l'erreur en régime permanent du système pour une consigne échelon unité ($r(t) = u_{-1}(t)$ et $d(t) = 0$) ?

**i.** Quelle est l'erreur en régime permanent du système pour une consigne en rampe ($r(t) = tu_{-1}(t)$ et $d(t) = 0$) ? Que suggéreriez-vous pour diminuer cette erreur ?

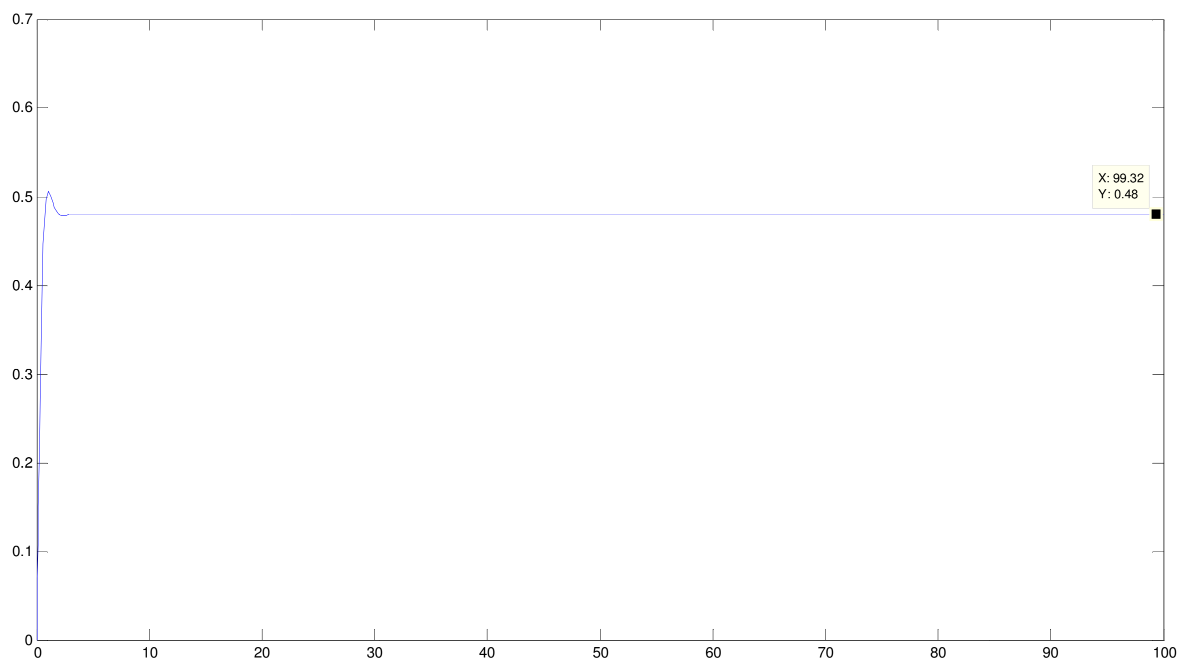
**j.** Quelle est la valeur $y(\infty)$ en régime permanent pour une perturbation échelon unité ($r(t) = 0$ et $d(t) = u_{-1}(t)$) ? Que suggéreriez-vous pour annuler l'effet de la perturbation sur la sortie ?

$$h) \quad E.R.P. = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$i) K_v = \lim_{s \to 0} sK_A \alpha G(s) = \frac{156.249 \cdot {}^{3}\!/\!{}_{7.5}}{(3)(10)} \approx 2.0833$$

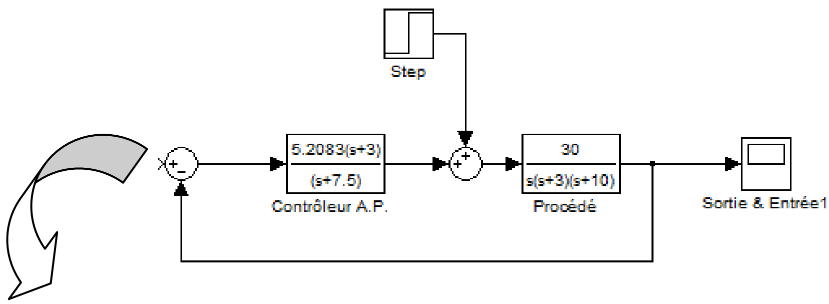
$$E.R.P. = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2.0833} = 0.48$$

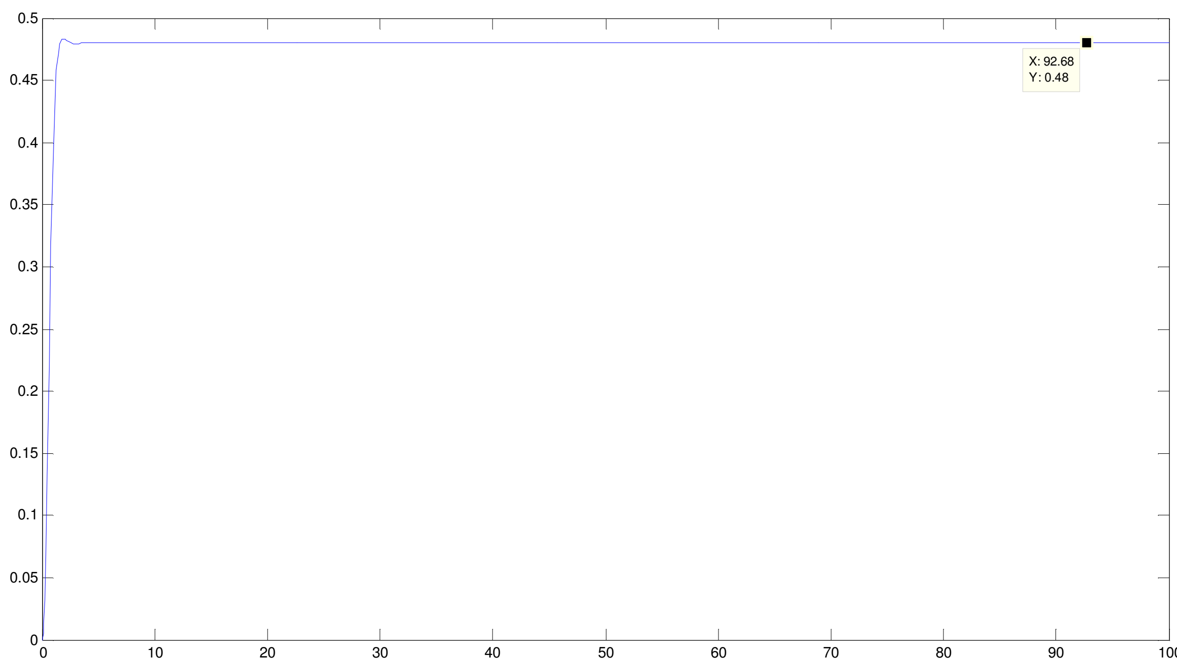
Effectivement :



$$j)\ y(t)=\lim_{s\to 0} s\left(\frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}\right)\left(\frac{1}{s}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{\dfrac{30}{(s+3)(s+10)}}{s+\dfrac{156.249}{(s+7.5)(s+10)}}\approx\frac{1}{2.0833}=0.48$$

En effet :



**Question 5** (5 points)

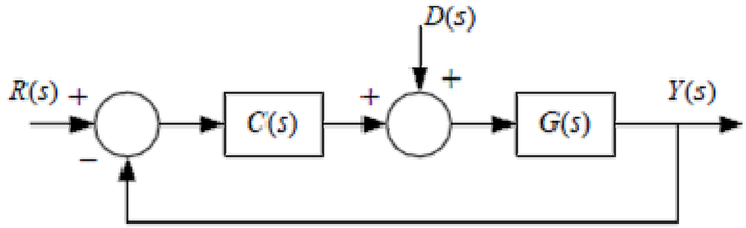



FIG. 3 – Synthèse d'un correcteur à avance de phase

Soit le système de la figure 3 où

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

a) Faire la synthèse d'un contrôleur à avance de phase $C(s)$ pour que le système en boucle fermée ait un amortissement de 0.6 et un temps de réponse à 2% de 2 secondes. (Indication : canceller le pôle à -2 avec le zéro du contrôleur et en déduire le pôle et le gain du contrôleur à avance de phase)

b) Quelle est l'erreur en régime permanent du système pour une consigne échelon unité $(r(t) = u_{-1}(t)$ et $d(t) = 0)$ ?

c) Quelle est l'erreur en régime permanent du système pour une consigne en rampe $(r(t) = tu_{-1}(t)$ et $d(t) = 0)$ ?

d) Quelle est la valeur $y(\infty)$ en régime permanent pour une perturbation échelon unité $(r(t) = 0$ et $d(t) = u_{-1}(t))$ ?

**Étape#1 & 2 :**

$$\zeta = 0.6 \quad \text{et} \quad \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \zeta\omega_n = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 3\,{}^{1}\!/_{3} \approx 3.3333$$

$$s_d = -2 \pm {}^{8}\!/_{3}\, j$$

$$C_A(s) = K_A \frac{\left(s + {}^{1}\!/_{\tau_A}\right)}{\left(s + {}^{1}\!/_{\alpha\tau_A}\right)} = K_A \frac{(s+2)}{\left(s + {}^{1}\!/_{\alpha\tau_A}\right)} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_A = {}^{1}\!/_{2}$$

**Étape#3 :**

$$180° = -\angle\left(s_d + \tfrac{1}{\alpha\tau_A}\right) - \angle(s_d)$$
$$= -\angle\left(-2 + \tfrac{8}{3}j + \tfrac{1}{\alpha\tau_A}\right) - \underbrace{\angle\left(-2 + \tfrac{8}{3}j\right)}_{90°+\text{atan}\left(\frac{2}{8/3}\right)\approx 126.8699°}$$

$$\angle\left(-2 + \tfrac{8}{3}j + \tfrac{1}{\alpha\tau_A}\right) = -180° - 126.8699° = -306.8699° = 53.1301°$$

Or, par simple inspection, vous savez que $\text{atan}\left(\frac{8/3}{2}\right) = 53.1301°$, donc;

Donc;

$$-2 + \tfrac{1}{\alpha\tau_A} = 2 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{\alpha\tau_A} = 4 \quad\Rightarrow\quad \alpha\tau_A = \tfrac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \tfrac{1}{2}$$

**Trouvons maintenant le gain $K_A$ :**

$$|C(s_d)G(s_d)| = 1 \quad\Rightarrow\quad \left|K_A\left(\frac{s_d+2}{s_d+4}\right)\left(\frac{1}{(s_d+2)s_d}\right)\right| = \left|K_A\left(\frac{1}{s_d+4}\right)\left(\frac{1}{s_d}\right)\right| = 1$$
$$\Rightarrow K_A = |(s_d+4)(s_d)| = \left|\left(-2 + \tfrac{8}{3}j + 4\right)\left(-2 + \tfrac{8}{3}j\right)\right|$$
$$= \left(\sqrt{(-2+4)^2 + \tfrac{8}{3}^2}\right)\left(\sqrt{(-2)^2 + \tfrac{8}{3}^2}\right) \approx 11.1111$$

**Le contrôleur est donc :**

$$C(s) = 11.1111\frac{s+2}{s+4}$$

Vérifications - en boucle fermée :

$$T(s) = \frac{11.1111}{(s^2 + 4s + 11.1111)}$$

Effectivement les pôles sont situés aux bons endroits :

```
>> roots([1 4 11.1111])

ans =

  -2.0000 + 2.6667i
  -2.0000 - 2.6667i
```

L’erreur en régime permanent pour une entrée de type échelon :

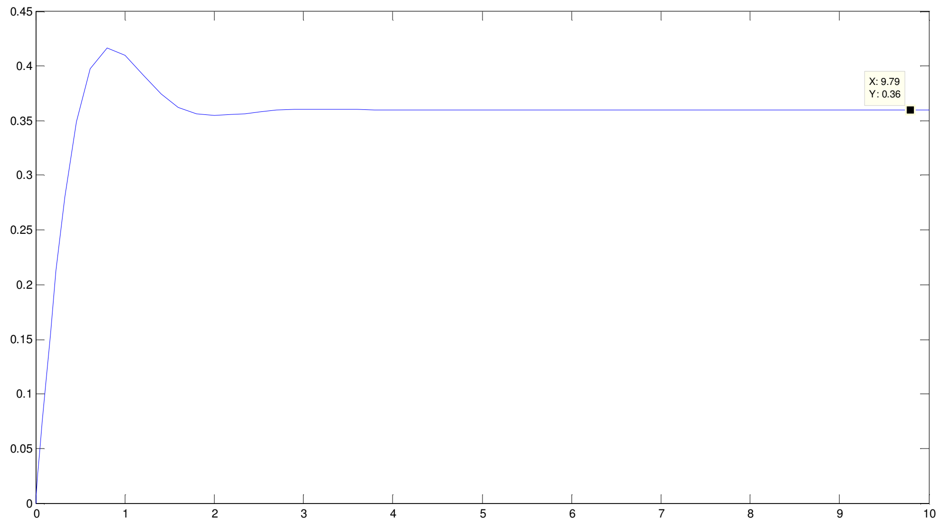
$$E.R.P. = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{\infty} = 0$$

L’erreur en régime permanent pour une entrée de type rampe unitaire :

$$K_v = \lim_{s\to 0} sC(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_A\alpha\frac{1}{s(s+2)} = 11.1111\cdot 0.5\cdot 0.5 \approx 2.7778$$

$$E.R.P. = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2.7778} = 0.36$$

Effectivement, voici le graphique de l’erreur en fonction du temps :




La valeur de la sortie pour une perturbation de type échelon unité :

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}\right)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1/\left(s(s+2)\right)}{1+11.1111/\left(s(s+4)\right)}\right)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1/(s+2)}{s+11.1111/(s+4)} = \frac{0.5}{11.1111/4} = 0.18$$

Effectivement :